Φροντιστήριο Μ.Ε. Συνειρμός

Μαθηματικά Γ΄ Επαγγελματικού Λυκείου

Απαντήσεις στα θέματα των Πανελλαδικών Εξετάσεων

1-6-2024

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Φυλλάδιο Αποδείξεων: Απόδειξη **5**

Α2. **α)** Φυλλάδιο Ορισμών: Ερώτηση **25**, **β)** Φυλλάδιο Ορισμών: Ερώτηση **39**

Α3. **α)** Λάθος, **β)**Λάθος, **γ)** Σωστό, **δ)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β:

Β1. $D_f = \mathbb{R}$, Η f είναι παραγωγίσιμη με:

$f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3})'$

$f'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' - (3x^2)' + (5x)' + (\frac{1}{3})'$

$f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - 6x + 5$

$\boxed{f'(x) = x^2 - 6x + 5}$

Β2. Λύνουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x_1 = 1}, \boxed{x_2 = 5}$$

Άρα, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας της f:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1)=\frac{8}{3}$	$\searrow$	$f(5)=-8$	$\nearrow$	

<u>Μονοτονία:</u> Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[5,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$.

<u>Ακρότατα:</u> Η f παρουσιάζει:

- Τοπικό μέγιστο στο $x=1$ με τιμή $f(1)=\frac{8}{3}$.

- Τοπικό ελάχιστο στο $x=5$ με τιμή $f(5)=-8$.

B3. Σημείο επαφής $M(0,f(0))$.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}$ <u>και</u> $f'(x)=x^2-6x+5$

$\boxed{f(0)=\frac{1}{3}}$ $\boxed{f'(0)=5}$

• Σημείο επαφής $M(0,\frac{1}{3})$.

• Συντελεστής διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=5$.

Έστω $\varepsilon:\ y=\lambda_\varepsilon\cdot x+\beta_\varepsilon$ η ζητούμενη εφαπτομένη.

Τότε: $\varepsilon:\ y=5\cdot x+\beta_\varepsilon$

Επιπλέον, $M(0,\frac{1}{3})\in\varepsilon\Leftrightarrow\beta_\varepsilon=\frac{1}{3}$.

Συνεπώς, $\boxed{\varepsilon: \ y = 5 \cdot x + \frac{1}{3}}$

B4. Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1)}$$

Επιπλέον, $f'(-1) = 12$.

Άρα, $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 12$.

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1. $s = \lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x+7}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Γ2.

$$CV = \tfrac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow$$

$$\tfrac{20}{100} = \tfrac{4}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow$$

$$|\bar{x}| = 20 \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = 20 \text{ ή } \bar{x} = -20$$

Γ3.

- Αν $\bar{x} = 20$ τότε:

$\bar{x} = \frac{22+18+20+k+14+16}{5} \Leftrightarrow 20 = \frac{90+k}{5} \Leftrightarrow k = 10$

- Αν $\bar{x} = -20$ τότε:

$\bar{x} = \frac{22+18+20+k+14+16}{5} \Leftrightarrow -20 = \frac{90+k}{5} \Leftrightarrow k = -190$

η οποία απορρίπτεται ως μη ρεαλιστική. (Στο συγκεκριμένο θέμα υπάρχει ασάφεια στο Γ2, επομένως αυτός είναι και ο μόνος τρόπος να απορρίψουμε την περίπτωση $\bar{x} = -20$, λαμβάνοντας υπόψη τις θερμοκρασίες στην Ελλάδα).

Για την εύρεση της διαμέσου διατάσσουμε το δείγμα κατ΄ αύξουσα σειρά $14, 16, 18, 22, 30$ και επειδή $v = 5$ (περιττός), η διάμεσος ισούται με τη μεσαία παρατήρηση t_3.

Επομένως, $\boxed{\delta{=}18}$.

Γ4 Αν οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 10% , τότε οι νέες παρατηρήσεις, θα δίνονται από τον τύπο: $y_i = x_i + \frac{10}{100}x_i \Leftrightarrow y_i = 1.1x_i$, $i = 1, ..., 5$.

Συνεπώς, από τους τύπους της νέας μεταβλητής θα έχουμε:

$\bar{y} = 1.1\bar{x}$ και $s_y = |1.1|s_x$

Επομένως, $CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{1.1s_x}{|1.1\bar{x}|} = \frac{s_x}{|\bar{x}|} = CV_x = 20\%$.

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1.

<u>Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ με Π.Θ:</u>

$$(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + y^2 = 10^2 \Leftrightarrow$$
$$y^2 = 100 - x^2, (1)$$

Επειδή τα x, y είναι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου, ισχύουν:

$$\boxed{0 < x < 10}\ ,\ \boxed{0 < y < 10}$$

Συνεπώς, $(1) \Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$.

Για το πεδίο ορισμού: Πρέπει $100 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-10, 10]$ και $0 < x < 10$.

Άρα, $D_f = (0, 10)$.

Δ2. Έχουμε:

$f'(x) = (\sqrt{100 - x^2})'$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100-x^2}} \cdot (100 - x^2)'$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{100-x^2}} \cdot (-2x)$

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$

$f'(8) = \frac{-8}{\sqrt{100-64}}$

$f'(8) = \frac{-8}{6}$

$f'(8) = -\frac{4}{3}$

Δ3.

$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6} = \lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6} = \lim_{x\to 6}\frac{(\sqrt{100-x^2}-8)(\sqrt{100-x^2}+8)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} =$$

$$= \lim_{x\to 6}\frac{100-x^2-8^2}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = \lim_{x\to 6}\frac{100-x^2-64}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = \lim_{x\to 6}\frac{36-x^2}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} =$$

$$= \lim_{x\to 6}\frac{(6-x)(6+x)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = \lim_{x\to 6}\frac{-(x-6)(6-x)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = \lim_{x\to 6}\frac{-6-x}{(\sqrt{100-x^2}+8)} =$$

$= -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$.

Δ4. $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}} < 0$, για $x \in (0,10)$, άρα, $f \searrow (0,10)$.

Επιπλέον, $x_1, x_2, x_3 \in (0,10)$, άρα έχουμε:

$x_1 < x_3 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.